TITLE:

超可積分系についての考察 (力学系と微分幾何学)

AUTHOR(S):

片山, 登揚

CITATION:
片山, 登揚. 超可積分系についての考察 (力学系と微分幾何学). 数理解析研究所講究録 1998, 1070: 52-68

ISSUE DATE:
1998-11

URL:
http://hdl.handle.net/2433/62555

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1070 巻 1998 年 52-68

超可積分系についての考察

大阪府立工業高等専門学校 片山登揚 (Katayama, Noriaki)

力学系の研究の中で、可積分系 (integrable system) は解ける力学系として、重要な系である。自由度nのハミルトン力学系を考えるとき、包合系をなす独立なn個の保存量（第一積分、運動の恒量ともよばれる）が存在するとき、その力学系は可積分系と呼ばれて求積法で解けることが知られている。他方、力学系の対称性の観点から、閉軌道性を持つ力学系がいろいろ調べられてきた。ここで、閉軌道性とは、有界な軌道が全て閉軌道となる力学系の性質のことである。閉軌道性を持つ力学系は、中心力問題においては、ケプラー運動と調和振動子だけであることはBertrand の定理としてよく知られている。閉軌道性をもつ力学系は、可積分系の観点からは、いわゆる超可積分系 (superintegrable system, overintegrable system) であると言われる。ここで、超可積分系とは可積分系の中でさらに独立な$n-1$個の保存量（合計で$2n-1$個の独立な保存量）を持つ力学系である。

与えられた力学系が、超可積分系であるかどうかの判定は、$2n-1$個の保存量をもつかどうか、または系が閉軌道性を持つかどうかで判定できる。ここでは、これまでに見い出されてきた超可積分系について、超可積分系を特徴付ける付加的な$n-1$個の独立な保存量を具体的に導出するとき、作用、角変数を計算することなく、軌道の式から閉軌道性と保存量が簡単に導かれることをしめす。

1 超可積分系の簡単な例（自由運動、調和振動子、Kepler 運動）

まず、自由度1のハミルトン力学系は、ハミルトニアンを保存量として持つので、必ず可積分系であり、しかも有界な軌道は必ず閉軌道となるので（閉軌道性を持つ）、超可積分系でもある。そこで、本節では超可積分系の例として、自由運動、調和振動子、Kepler 運動について簡単に述べる。保存量については、運動量について2次までの保存量を考える。自由度の数をnとしたときに、$2n-1$個の独立な保存量を各力学系が許容することを具体的に見る。

まず、最初に自由運動について考える。自由度2の自由運動は、位置ベクトルと運動量ベクトルをそれぞれ2次元ベクトル$\boldsymbol{q}=(q^1,q^2)$ と $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)$で表すとき、Hamiltonian

$$H_{free,2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}p_i^2, \tag{1.1}$$

をもつが、よく知られているように、保存量としては、

$$H_{free,2}, \quad p_1, \quad p_2, \quad q^1p_2 - q^2p_1,$$

をもつ。これらには、式(1.1)の関係があり、独立な保存量は3個である。

同じく、自由度3の自由運動も、位置ベクトルと運動量ベクトルをそれぞれ3次元ベクトル$\boldsymbol{q} = (q^1, q^2, q^3)$ と $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ で表すとき、Hamiltonian

$$H_{free,3} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i^2, \tag{1.2}$$

をもつ。このときは、運動量に加えて、角運動量の3個の成分が保存される。つまり、

$$H_{free,3}, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad L_{jk} = q^jp_k - q^kp_j, \quad (i, j = 1, 2, 3, i < j),$$

の7個の関数が、保存量となる。保存量の間には、式(1.2)と

$$p_1L_{23} + p_2L_{31} + p_3L_{12} = 0$$

の合計2個の関係式があり、独立な保存量は5個である。

全く同様に、自由度$n(\geq 3)$の自由運動も、超可積分系であることがわかる。つまり、Hamiltonian

$$H_{free,n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2, \tag{1.3}$$

に対して、保存量としては、

$$H_{free,n}, \quad p_i \quad (i = 1, \cdot\cdot, n), \quad L_{ij} = q^ip_j - q^jp_i \quad (i, j = 1, \cdot\cdot, n, \text{ただし} \quad i < j)$$

が存在する。ところが、式(1.3)と任意のi, j, k （ただし$(1 \leq i, j, k \leq n)$）に対して

$$p_iL_{jk} + p_jL_{ki} + p_kL_{ij} = 0$$

の関係式が成立するので、例えば$2n-1$個の関数的独立な保存量として、

$$p_i \quad (i = 1, \cdot\cdot, n), \quad L_{1j} = q^1p_j - q^jp_1 \quad (j = 2, \cdot\cdot, n)$$

をとることができる。包合系をなす、保存量が$p_i(i = 1, \cdot\cdot, n)$ であり、超可積分性を示す付加的な保存量が、$L_{1j} = q^1p_j - q^jp_1(j = 2, \cdot\cdot, n)$ である。関数的独立性と包合系をなす性質は直接計算によって示される。ただし、自由運動は超可積分系であるが非有界な軌道を示す。

次に、等方的調和振動子について考える。自由度２の調和振動子は、自由運動のときと同様に、位置ベクトルと運動量ベクトルをそれぞれ２次元ベクトル$\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{p}$で表すとき、定数kを用いてHamiltonianは次式で与えられる。

$$H_{h,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} p_i^2 + \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{2}(q^i)^2. \tag{1.4}$$

保存量としては、よく知られているように、

$$H_{h,2}, \quad M_{11} = p_1^2 + k(q^1)^2, \quad M_{22} = p_2^2 + k(q^2)^2, \quad M_{12} = p_1p_2 + kq^1q^2, \quad L_{12} = q^1p_2 - q^2p_1$$

が許容されるが、これらには、次の２つの関係式が成立する。

$$M_{11} + M_{22} = 2H_{h,2}, \quad M_{11}M_{22} - M_{12}^2 = kL_{12}^2.$$

従って、独立な保存量は３個であることが分かる。

同じく、自由度３の調和振動子も、３次元ベクトル$\boldsymbol{q}$と$\boldsymbol{p}$を用いて表すとき、Hamiltonian

$$H_{h,3} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 + \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{3}(q^i)^2, \tag{1.5}$$

をもつ。このとき、保存量は角運動量の３成分も加わって、

$$H_{h,3}, \quad M_{ij} = p_ip_j + kq^iq^j \quad (i,j = 1,2,3, \quad i \le j), \quad L_{ij} = q^ip_j - q^jp_i \quad (i,j = 1,2,3, \quad i < j),$$

となる。つまり、１０個の保存量が導かれる。しかし、次に示す保存量の間の関係

$$det(M_{ij}) = 0,$$

$$M_{11} + M_{22} + M_{33} = 2H_{h,3}, \quad M_{ii}M_{jj} - M_{ij}^2 = kL_{ij}^2, \quad (i,j = 1,2,3, i < j)$$

の合計５個の保存量の関係式があり、独立な保存量は５個である。ここで、$det(M_{ij})$ は、M_{ij}を要素にもつ３行３列の行列の行列式を表す。

全く同様に、自由度$n (\geq 3)$の調和振動子も超可積分系であることがわかる。つまり、Hamiltonian

$$H_{h,n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{n}(q^i)^2, \tag{1.6}$$

に対して、

$$H_{h,n}, \quad M_{ij} = p_ip_j + kq^iq^j (i,j = 1,\cdots,n, i \le j), \quad L_{ij} = q^ip_j - q^jp_i (i,j = 1,\cdots,n, i < j)$$

の保存量を持つことが、知られている。このとき、保存量には、

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ii} = 2H_{H,n}, \quad M_{ii}M_{jj} - M_{ij}^2 = kL_{ij}^2, \quad (i, j = 1, \cdot\cdot, n, i \leq j)$$

の関係に加えて、1からnのうち任意に選んだ、3個の値u, v, wに対して、次の3行3列の行列の行列式が0となる関係が成立する。 つまり、

$$det \begin{pmatrix} M_{uu} & M_{uv} & M_{uw} \\ M_{vu} & M_{vv} & M_{vw} \\ M_{wu} & M_{wv} & M_{ww} \end{pmatrix} = 0$$

となる。従って、これらの関係から、関数的独立な保存量として、たとえば、$M_{ii}, (i = 1, \cdot\cdot, n)$ と $M_{1j}, (j = 2, \cdot\cdot, n)$ をとることができる。可積分性を示す包合系をなす保存量が$M_{ii}, (i = 1, \cdot\cdot, n)$ であり、付加的な保存量が$M_{1j}, (j = 2, \cdot\cdot, n)$ であることが示される。もちろん、調和振動子は、定数kが正のとき軌道は有界となり、しかも必ず閉軌道をなしている。

本節の最後に、Kepler 運動について考える。自由度2のKepler 運動は、自由運動や調和振動子と同様に、位置ベクトルと運動量ベクトルをそれぞれ2次元ベクトル$\boldsymbol{q}$と$\boldsymbol{p}$で表すとき、定数kを用いてHamiltonian

$$H_{K,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} p_i^2 - \frac{k}{r}, \tag{1.7}$$

をもつ。ただし、$r = \sqrt{\sum_{j=1}^{2}(q^i)^2}$である。Kepler 運動は、よく知られているように、保存量としては、次の4個が知られている。

$$H_{K,2}, \quad L_{12} = q^1 p_2 - q^2 p_1, \quad R_1 = p_2 L_{12} - k\frac{q^1}{r}, \quad R_2 = -p_1 L_{12} - k\frac{q^2}{r}.$$

これらの保存量には、

$$R_1^2 + R_2^2 = 2H_{K,2}L_{12}^2 + k^2$$

の関係があり、独立な保存量は3個である。

同じく、自由度3のKepler運動は、Hamiltonian

$$H_{K,3} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 - \frac{k}{r}, \tag{1.8}$$

をもつ力学系で、このときの保存量は、

$$H_{K,3}, \quad L_{ij} = q^i p_j - q^j p_i \quad (i, j = 1, 2, 3, i < j), \quad R_i = \sum_{j=1}^{3} L_{ij}p_j - k\frac{q^i}{r} \quad (i = 1, 2, 3),$$

の7個が知られている。これら、Hamiltonian 以外の保存量は、通常の3次元ベクトルの表示を用いれば、角運動量ベクトル$\boldsymbol{J}_o = (J_1, J_2, J_3) := (L_{23}, L_{31}, L_{12})$ と Runge-Lenz ベクトル$\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, R_3)$は、

$$\boldsymbol{J}_o = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J}_o - k\frac{\boldsymbol{q}}{r}$$

で与えられる。やはり、これらの保存量には、

$$\sum_{i=1}^{3} R_i^2 = 2H_{K,3}\sum_{i=1}^{3} J_i^2 + k^2, \quad \sum_{i=1}^{3} R_i J_i = 0,$$

の2個の関係式が成り立ち、関数的独立な保存量は5個である。包合系をなす、保存量としてはよく知られているように次の3個の保存量であり、$H_{K,3}, J_3, \sum_{i=1}^{3} J_i^2$、超可積分性を示す保存量は$R_1, R_2$ である。

さらに、自由度$n(\geq 4)$のKepler 運動を考える。Hamiltonian は、

$$H_{K,n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - \frac{k}{r}, \tag{1.9}$$

であたえられる。もちろん、$r = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(q^j)^2}$である。このときの保存量としては、

$$H_{K,n}, \quad L_{ij} = q^i p_j - q^j p_i \quad (i, j = 1, \cdot\cdot, n, i < j) \quad R_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} p_j - k\frac{q^i}{r} \quad (i = 1, \cdot\cdot, n)$$

が存在し、L_{ij}が角運動量、R_iがRunge-Lenz ベクトルの各成分に対応している。一般にn次元の中心力系の可積分性を示す保存量の構成については、参考文献[1]を参照のこと。なお、Kepler運動は、有界な軌道はすべて閉軌道となる。

2 Kepler 問題の拡張

本節では、自由度3の力学系で非線形の超可積分系の例として、前節のKepler運動の拡張である、MIC-Kepler運動、Taub-NUT計量に付随した力学系、多重Kepler運動、一般化多重Kepler運動について、簡単に述べる。ケプラー運動の拡張としては、当然、閉軌道性をもち、しかもRunge-Lenz ベクトルに対応する保存ベクトルが、存在することが要求される。以下に述べる、力学系はこれらの性質をすべて満たしている[2,3,4,5,6]。

まず最初に、MIC-Kepler運動について述べる。MIC-Kepler運動とは、$T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}) \cong (\mathbf{R}^3 - \{0\}) \times \mathbf{R}^3$で定義された力学系で、Hamiltonian H_{MIC}とsymplectic 形式ω_μは、座標$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \in (\mathbf{R}^3 - \{0\}) \times \mathbf{R}^3$ を用いて、次の式であたえられる。

$$H_{MIC} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} p_j^2 + \frac{\mu^2}{2r^2} - \frac{k}{r}, \tag{2.1}$$

$$\omega_\mu = \sum_{j=1}^{3} dp_j \wedge dq^j - \frac{\mu}{r^3}(q^1 dq^2 \wedge dq^3 + \text{cyclic}). \tag{2.2}$$

ただし、$r = |\boldsymbol{q}|$ で、μ, k は実定数 $(k > 0)$. $\mu = 0$ のときが普通の Kepler 問題である。この系には２つの保存ベクトル、角運動量ベクトル $\boldsymbol{J}$ と Runge-Lenz ベクトル $\boldsymbol{R}_{MIC}$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} + \mu\frac{\boldsymbol{q}}{r}, \quad \boldsymbol{R}_{MIC} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J} - k\frac{\boldsymbol{q}}{r}, \tag{2.3}$$

が存在し、そのことから、解軌道が円錐曲線になることが結論できる。すなわち、$\boldsymbol{J}$と$\boldsymbol{q}/r$の内積 $(\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{q}/r) = \mu$ から、解軌道は角運動量ベクトル$\boldsymbol{J}$を軸とする円錐上にのっていることがわかり、また

$$\boldsymbol{N}_{MIC} = \mu \boldsymbol{R}_{MIC} + k\boldsymbol{J}, \tag{2.4}$$

とおくとき、$(\boldsymbol{N}_{MIC} \cdot \boldsymbol{q}) = \mu(|\boldsymbol{J}|^2 - \mu^2)$ から、軌道は平面曲線をなすことがいえるので、結局解軌道は、円錐と平面との交線である円錐曲線であることがわかる。特に、有界な軌道はすべて閉軌道となることがわかる。可積分性を示す保存量は、$H_{MIC}, J_3, \sum_{i=1}^{3} J_i^2$で、超可積分性を示す付加的な保存量は、例えば$\boldsymbol{R}_{MIC}$のうちの２つの成分である。

次に、Taub-NUT 計量に付随する力学系について述べる。本力学系は、MIC-Kepler 運動と同じ記号で、$(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \omega_\mu)$ 上の力学系であり、 Hamiltonian

$$H_{TN} = \frac{1}{2f(r)}\sum_{k=1}^{3} p_k^2 + \frac{\mu^2}{2g(r)}, \tag{2.5}$$

をもつものである。ただし、mを定数として、関数$f(r), g(r)$は

$$f(r) = 1 + \frac{4m}{r}, \quad g(r) = \frac{(4m)^2}{1 + 4m/r}, \tag{2.6}$$

で与えられる。このとき、保存ベクトルは、(2.3) に対応して

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} + \mu\frac{\boldsymbol{q}}{r}, \quad \boldsymbol{R}_{TN} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J} - 4m(H_{TN} - \frac{\mu^2}{16m^2})\frac{\boldsymbol{q}}{r}, \tag{2.7}$$

で与えられる。やはり、これらの保存ベクトルから軌道は閉軌道性を示すことがわかる。可積分性を示す保存量は、MIC-Kepler 運動の時と同様に、ハミルトニアンと角運動量ベクトルであり、超可積分性を示す保存量はやはり、$\boldsymbol{R}_{TN}$である。

次に、ケプラー運動の３番目の拡張として多重ケプラー運動について述べる。前述の Taub-NUT 計量に付随する力学系と同じ記号で、$(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \omega_\mu)$ 上の力学系で 式(2.5) で与えられる Hamiltonian H_{TN}に現れる関数$f(r), g(r)$が

$$f(r) = r^{1/\nu - 2}(a + br^{1/\nu}), \quad g(r) = \frac{r^{1/\nu}(a + br^{1/\nu})}{1 + cr^{1/\nu} + dr^{2/\nu}}, \tag{2.8}$$

で与えられる力学系である。ここで、a,b,c,d,νは定数であり、また特に定数 νは有理数である。具体的にHamiltonianを書き下すと、

$$H_{MK}=\frac{r^{2-1/\nu}}{2(a+br^{1/\nu})}\sum_{k=1}^{3}p_k^2+\frac{\mu^2(1+cr^{1/\nu}+dr^{2/\nu})}{2r^{1/\nu}(a+br^{1/\nu})}, \tag{2.9}$$

となる。保存ベクトルも、$\nu=1$ の時はTaub-NUT 計量に付随する力学系に対応して

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}+\mu\frac{\boldsymbol{q}}{r},\quad \boldsymbol{R}_{MK}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J}-(aH_{MK}-\frac{c\mu^2}{2})\frac{\boldsymbol{q}}{r}, \tag{2.10}$$

で与えられる。多重ケプラー運動は、MIC-Kepler運動やTaub-NUT計量に付随した力学系の拡張になっていることが容易にわかる。全く同様に、多重ケプラー運動は閉軌道性を示して、超可積分系であることがわかる。

ケプラー運動の拡張の最後として、一般化多重ケプラー運動について述べる。本力学系は、多重ケプラー運動のさらなる拡張であり、超可積分系である。一般化多重ケプラー運動は、Taub-NUT 計量に付随する力学系と同じ記号で、$(T^*(\mathbf{R}^3-\{0\}),\omega_\mu)$ 上の力学系でHamiltonian

$$H_{GMK}=\frac{r^2}{2f_2(r)}\sum_{j=1}^{3}p_j^2+\frac{1}{2}\left(\frac{f_2(r)-r^2f_1(r)}{2r^2f_1(r)f_2(r)}\right)(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})^2+\frac{\mu^2}{2f_3(r)} \tag{2.11}$$

を持つものである。ただし、関数 $f_1(r),f_2(r),f_3(r)$ は

$$\begin{aligned}f_1(r)&=\frac{r^{1/\nu-2}(a_0+a_1r^{1/\nu})}{(1+a_2r^{1/\nu}+a_3r^{2/\nu})^2},\\ f_2(r)&=\frac{r^{1/\nu}(a_0+a_1r^{1/\nu})}{1+a_2r^{1/\nu}+a_3r^{2/\nu}},\\ f_3(r)&=\frac{r^{1/\nu}(a_0+a_1r^{1/\nu})}{1+a_4r^{1/\nu}+a_5r^{2/\nu}},\end{aligned} \tag{2.12}$$

で与えられ、$a_0,...,a_5$は定数であり、さらに定数νは有理数である。$a_2=a_3=0$のとき、多重ケプラー運動と一致することがわかる。角運動量ベクトルは$\boldsymbol{J}$で与えられ、$\nu=1$ の時の保存ベクトルは、

$$\boldsymbol{R}_{GMK}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J}+\left(-a_0H_{GMK}+\frac{J^2-\mu^2}{2}a_2+\frac{\mu^2}{2}a_4\right)\frac{\boldsymbol{q}}{r}+\frac{a_2+a_3r}{r}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{J} \tag{2.13}$$

で与えられる。ここで、$J=|\boldsymbol{J}|$ である。この保存ベクトル$\boldsymbol{R}_{GMK}$はRunge-Lenzベクトルと呼ぶことができ、多重ケプラー運動の時の$\boldsymbol{R}_{MK}$ の拡張となっている。さらに、

$$\boldsymbol{N}=\mu\boldsymbol{R}_{GMK}-\left(-a_0H_{GMK}+\frac{J^2-\mu^2}{2}a_2+\frac{\mu^2}{2}a_4\right)\boldsymbol{J} \tag{2.14}$$

と一定のベクトルを定義すると、

$$(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{q})=\mu(J^2-\mu^2) \tag{2.15}$$

が成立して軌道は平面曲線となることが解る。つまり、$\nu=1$ のときはMIC-Kepler運動の時と同様に、軌道は角運動量ベクトル$\boldsymbol{J}$を軸とした円錐上にありかつ平面曲線なので円錐曲線となる。更に、運動方程式から

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{q}}{dt^2}=(\frac{1+a_2r+a_3r^2}{a_0+a_1r})^3\boldsymbol{N} \tag{2.16}$$

なる関係も示され、軌道の陪法線ベクトルの方向が一定であることが分かる。

以上ここで示した、力学系は超可積分系の例であり、しかも自由度4の力学系から、簡約化の手続きを通して導かれる力学系でもある。従って、背後にある4次元計量との関係も詳しく調べられてきた。また、力学系の配位空間の拡張の点からも、定曲率空間のケプラー運動や調和振動子も調べられている。これらも超可積分系の例となっている。

3　調和振動子の拡張と付加的な保存量の構成

本節では、調和振動子の拡張として、n次元の超可積分系を構成して、さらに、超可積分性を特徴付ける付加的な$n-1$個の保存量が構成できることを示す。従来、保存量の構成方法および発見は、保存量の形をたとえば運動量の2次式であると仮定して、運動に沿って一定である条件から微分方程式を解くことより導かれた。または、第2節で示した、一連のケプラー運動の拡張系における、Runge-Lenz ベクトルは閉軌道性を示した後、配位空間の基本ベクトルを位置ベクトルや運動量ベクトルで表すことにより、導かれたものである。ここでは、閉軌道性がある力学系では、つまり超可積分系では、その超可積分性を示す付加的な$n-1$個の保存量を、容易に構成できることを示す。

まず、デカルト座標(x,y)で、 Hamiltonian が次の式H_1で与えられる、自由度2の力学系を考える。

$$H_1=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)+A(x^2+y^2)+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{y^2}. \tag{3.1}$$

ここで、A,B,C　は定数である。この力学系は、変数分離系であり Hamiltonian 以外に、次の保存量を持っている。

$$I_1=p_x^2+2Ax^2+2\frac{B}{x^2},\quad I_2=p_y^2+2Ay^2+2\frac{C}{y^2}. \tag{3.2}$$

もちろん、$I_1+I_2=2H_1$である。これらの保存量により可積分系であることがわかるが、さらに、次の関数を運動は保存する。

$$I_3=\frac{1}{2}(p_xy-p_yx)^2+B\frac{y^2}{x^2}+C\frac{x^2}{y^2}. \tag{3.3}$$

保存量I_3は、微分方程式の解としてしめされた[7]。ここでは、保存量I_3を以下に示すように閉軌道性と密接に関係することを示しながら導出する。まず、保存量I_1より、

$$p_x^2x^2 + 2A(x^2 - \frac{I_1}{4A})^2 = \frac{I_1^2 - 16AB}{8A}, \tag{3.4}$$

と変形でき、$A > 0$の条件のもとで、軌道は有界となり、上式の右辺の正の定数をK^2とおく。このとき、角変数χを用いて、

$$p_x x = K\cos\chi \quad \sqrt{2A}(x^2 - \frac{I_1}{4A}) = K\sin\chi, \tag{3.5}$$

とパラメータ表示できる。変数yについても、同様に保存量I_2より定数$\tilde{K}$と角変数ϕを用いて、

$$p_y y = \tilde{K}\cos\phi \quad \sqrt{2A}(y^2 - \frac{I_2}{4A}) = \tilde{K}\sin\phi, \tag{3.6}$$

と表示できる。ここで、

$$\tilde{K}^2 = \frac{I_2^2 - 16AB}{8A}$$

である。さて、x, yの運動方程式は(3.5)と(3.6)より角変数χ, ϕの方程式に変換されて次のようになる。

$$\frac{d\chi}{dt} = 2\sqrt{2A}, \quad \frac{d\phi}{dt} = 2\sqrt{2A}. \tag{3.7}$$

つまり、

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d\phi}{dt}, \tag{3.8}$$

より$\chi - \phi =$定数となる。従って、次の保存量を得る。

$$\cos(\chi - \phi) = \frac{-1}{K\tilde{K}}(\frac{1}{2}(p_x y - p_y x)^2 + B(\frac{y^2}{x^2}) + C(\frac{x^2}{y^2})). \tag{3.9}$$

Kと$\tilde{K}$は、保存量なので(3.9)より(3.3)の保存量が導かれる。I_1とI_2は、ポアソン可換な保存量であり、I_1, I_2, I_3が関数的独立な保存量である。また、式(3.7)は(x, y)の軌道を2次元トーラス上で表したことになりもとの軌道の閉軌道性を示している。

いま、もし式(3.8)が互いに素な整数nとmを用いて、

$$m\frac{d\chi}{dt} = n\frac{d\phi}{dt}, \tag{3.10}$$

と表されたとすると、$m\chi - n\phi =$定数となる。つまり、

$$\cos(m\chi - n\phi) = \cos(m\chi)\cos(n\phi) + \sin(m\chi)\sin(n\phi), \tag{3.11}$$

が保存量となる。もちろん、(3.11)は、$\cos(\chi), \cos(\phi), \sin(\chi), \sin(\phi)$で表されるので、$x, y, p_x, p_y$で表される。(3.10)は、閉軌道性をも示している。

これらの結果から、自由度nの超可積分系（調和振動子の拡張）を構成する。まず、一般化座標を$x_i, (i = 1, \cdot\cdot, n_1), \tilde{x_j}, (j = n_1 + 1, \cdot\cdot, n)$として、それぞれに共役な運動量を$p_i, (i = 1, \cdot\cdot, n_1), \tilde{p_i}, (i = n_1 + 1, \cdot\cdot, n)$とする。さらに、Hamiltonianが次式で与えられる自由度nの力学系を考える。

$$H = \frac{1}{G_0}\left(\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n_1} p_i^2 + \sum_{j=n_1+1}^{n} \tilde{p_j^2}) + \sum_{i=1}^{n_1} c_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{d_i}{x_i^2} + \sum_{j=n_1+1}^{n} \gamma_j \tilde{x_j}^2 + \sum_{j=n_1+1}^{n} \delta_j \tilde{x_j} + e\right). \tag{3.12}$$

ただし、

$$G_0 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{b_i}{x_i^2} + \sum_{j=n_1+1}^{n} \alpha_j \tilde{x_j}^2 + \sum_{j=n_1+1}^{n} \beta_j \tilde{x_j} + f,$$

である。ここで、$\boldsymbol{x} = (x_i, \tilde{x_i}), \boldsymbol{p} = (p_i, \tilde{p_i})$とおくとき、正準座標（$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{p}$）$\in ((\mathbf{R} - \{0\})^{n_1} \times \mathbf{R}^{n-n_1}) \times \mathbf{R}^n)$以外は定数とする。ここで、包合系をなす$n$個の保存量は、

$$I_i = \frac{1}{2}p_i^2 + (c_i - a_i H)x_i^2 + \frac{d_i - b_i H}{x_i^2}, \quad (i = 1 \cdot\cdot\cdot\cdot n_1), \tag{3.13}$$

$$\tilde{I_j} = \frac{1}{2}\tilde{p_j^2} + (\gamma_j - \alpha_j H)\tilde{x_j}^2 + (\delta_j - \beta_j H)\tilde{x_j}, \quad (j = n_1 + 1 \cdot\cdot\cdot\cdot n), \tag{3.14}$$

で与えられる。

次に、角度変数によるパラメータ表示を行う。(3.13)から、つぎの関係を得る。

$$p_i^2 x_i^2 + 2(c_i - a_i H)(x_i^2 + \frac{I_i}{2(c_i - a_i H)})^2 = 2(b_i H - d_i) + \frac{I_i^2}{2(c_i - a_i H)}. \tag{3.15}$$

ここで、$c_i - a_i H > 0$と仮定する。(3.15)の右辺の正の定数をK_i^2とおく。つまり、

$$K_i^2 = 2(b_i H - d_i) + \frac{I_i^2}{2(c_i - a_i H)}, \tag{3.16}$$

とする。(3.15)から有界軌道をなす条件のもとで、角度変数χ_iを用いてパラメータ化を行うと、

$$p_i x_i = K_i \cos(\chi_i), \quad \sqrt{2(c_i - a_i H)}(x_i^2 + \frac{I_i}{2(c_i - a_i H)}) = K_i \sin(\chi_i). \quad (i = 1 \cdot\cdot\cdot\cdot n_1) \tag{3.17}$$

のようにおくことが出来る。この時x_iについての運動方程式は、

$$\frac{d\chi_i}{dt} = \frac{2\sqrt{2(c_i - a_i H)}}{G_0}, \quad (i = 1 \cdot\cdot\cdot\cdot n_1) \tag{3.18}$$

となる。全く同様に、保存量$\tilde{I_j}$より角変数ϕ_jを用いて$\tilde{x_j}$をパラメータ化すれば、

$$\tilde{K_j^2} = 2\tilde{I_j} + \frac{(\delta_j - \beta_j H)^2}{2(\gamma_j - \alpha_j H)}, \tag{3.19}$$

の正の定数$\tilde{K}_j$を用いて、

$$\tilde{p_j} = \tilde{K}_j \cos(\phi_j), \tag{3.20}$$

$$\sqrt{2(\gamma_j - \alpha_j H)}\left(\tilde{x_j} + \frac{\delta_j - \beta_j H}{2(\gamma_j - \alpha_j H)}\right) = \tilde{K}_j \sin(\phi_j). \quad (j = n_1 + 1 \cdots\cdot n) \tag{3.21}$$

とかける。$\tilde{x_j}$についての、運動方程式はϕ_jについての次に微分方程式となることが容易に示される。

$$\frac{d\phi_j}{dt} = \frac{\sqrt{2(\gamma_j - \alpha_j H)}}{G_0}, \quad (j = n_1 + 1 \cdots\cdot n) \tag{3.22}$$

従って、

$$\sqrt{2(\gamma_j - \alpha_j H)}\frac{d\chi_i}{dt} = 2\sqrt{2(c_i - a_i H)}\frac{d\phi_j}{dt}, \tag{3.23}$$

となる。

以上をまとめると、本力学系においては、$I_i, \tilde{I}_j, (i = 1, \cdot\cdot \quad n_1, j = n_1 + 1, \cdot\cdot n)$ がポアソン可換なn個の保存量であり、しかも、n個のパラメータ$2\sqrt{c_i - a_i H}, (i = 1, \cdot\cdot n_1), \sqrt{\gamma_j - \alpha_j H}(j = n_1 + 1, \cdot\cdot n)$が、有理数体上1次従属であれば、局所的な意味で超可積分系であると言える。ここで、局所的とは初期条件に依存して超可積分性が成り立つことによる。もちろん、$a_i = 0, \alpha_j = 0 (i = 1, \cdot\cdot \quad n_1, j = n_1 + 1, \cdot\cdot n)$であるならば、$2\sqrt{c_i}, (i = 1, \cdot\cdot n_1), \sqrt{\gamma_j}(j = n_1 + 1, \cdot\cdot n)$が有理数体上で一次従属であれば、超可積分系となる。

さて、残りの$n-1$個の保存量は次のようにして求められる。今、$\psi_i = \chi_i, \psi_j = \phi_j (i = 1, \cdot\cdot \quad n_1, j = n_1+1, \cdot\cdot n)$ とおいて、角度はすべて、ψで表すと超可積分性の条件より、互いに素な正の整数n_i, m_jを用いてすべての$i, j (1 \leq i < j \leq n)$ に対して、$\psi_i(t) m_j - \psi_j(t) n_i =$ 定数が成立する。したがって、(3.17), (3.20) や (3.21) からきまる、$\cos(\psi_i), \sin(\psi_i)$ を用いて次の式 (3.24) で計算される$F_{ij}, (i, j = 1, \cdots\cdot, n)$が保存量となるがそのうち、例えば超可積分系を特徴付ける保存量は、$F_{1j}, (j = 2, \cdots\cdot, n)$ の$n-1$個である。

$$F_{ij} = \cos(m_j \psi_i)\cos(n_i \psi_j) + \sin(m_j \psi_i)\sin(n_i \psi_j). \tag{3.24}$$

もちろん、このとき有界な軌道は全て閉軌道となる。

4 自由度2の自然ハミルトン系の超可積分系

本節では、前節の結果を再び自由度2の自然ハミルトン系に適用する。ここで、自由度2の自然ハミルトン系とは、デカルト座標(x, y)を用いて、ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y), \tag{4.1}$$

で与えられる系である。ハミルトン－ヤコビの方程式が変数分離となる座標系として、直角座標、極座標、放物線座標、楕円座標が知られている。放物線座標は一様な重力のもとでのケプラー運動で用いられ、楕円座標は重力２点中心問題に用いられることはよく知られている。超可積分系となる力学系として、以下の３個の例が知られている [7]。

$$H_1 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{a}{r} + \frac{b\sqrt{r+x}}{r} + \frac{c\sqrt{r-x}}{r}, \tag{4.2}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{a}{r} + \frac{1}{r}(\frac{b}{r+x} + \frac{c}{r-x}), \tag{4.3}$$

$$H_3 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{a}{r} + \frac{b}{y^2} + \frac{cx}{y^2 r}, \tag{4.4}$$

ここで、$r = \sqrt{x^2+y^2}$であり、a, b, cは定数である。H_1とH_2は、放物線座標で変数分離できH_3は極座標で変数分離できる。

まず、H_1から考察する。放物線座標の変数ξとηを次のようにおく。

$$\xi = \frac{r+x}{2}, \quad \eta = \frac{r-x}{2}. \tag{4.5}$$

逆に、(x, y) を (ξ, η) で表すと、

$$x = \xi - \eta, \quad y = 2\sqrt{\xi\eta}, \tag{4.6}$$

となる。このとき、Hamiltonian H_1 は次のようになる。

$$H_1 = \frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{2(\xi+\eta)} + \frac{a}{\xi+\eta} + \frac{b\sqrt{2\xi}}{\xi+\eta} + \frac{c\sqrt{2\eta}}{\xi+\eta}. \tag{4.7}$$

変数分離系であるので、分離定数をαとすると次の式を得る。

$$\xi p_\xi^2 + 2b\sqrt{2\xi} - 2H_1\xi + a = \alpha, \tag{4.8}$$

$$\eta p_\eta^2 + 2c\sqrt{2\eta} - 2H_1\eta + a = -\alpha. \tag{4.9}$$

式(4.8) は次のように変形される。

$$(\sqrt{\xi}p_\xi)^2 + (-2H_1)(\sqrt{\xi} - \frac{\sqrt{2}b}{2H_1})^2 = \alpha - a - \frac{b^2}{H_1}. \tag{4.10}$$

軌道が有界という条件より、上式の (4.10) の右辺をK_1^2とおくとき（K_1は正の定数）、次のように角変数χでパラメータ化出来る。

$$\sqrt{\xi}p_\xi = K_1\cos(\chi), \quad \sqrt{-2H_1}(\sqrt{\xi} - \frac{\sqrt{2}b}{2H_1}) = K_1\sin(\chi). \tag{4.11}$$

ξについての微分方程式は、χについての微分方程式

$$\frac{d\chi}{dt}=\frac{\sqrt{-2H_1}}{2(\xi+\eta)}, \tag{4.12}$$

となる。全く同様に、(4.9) よりηについて角変数ϕによるのパラメータ化を行うと、(4.12) に対応して、

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{\sqrt{-2H_1}}{2(\xi+\eta)}, \tag{4.13}$$

を得る。軌道について考えるとき、ξが最小値ξ_1から隣り合う最大値ξ_2まで変化するときの、ηの変化に対応するする角度ϕの増分$\Delta\phi$ を、

$$\Delta\phi=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{d\phi}{d\xi}d\xi, \tag{4.14}$$

と定義するとき、

$$\Delta\phi=\pi \tag{4.15}$$

となる。他方保存量については、$\chi-\phi=$定数より $\cos(\chi)\cos(\phi)+\sin(\chi)\sin(\phi)$ は保存量であるから、定数倍ののち

$$I=\sqrt{\xi\eta}p_\xi p_\eta+(-2H_1)(\sqrt{\xi\eta}-\frac{\sqrt{2\xi}b}{2H_1}-\frac{\sqrt{2\eta}c}{2H_1}), \tag{4.16 - 1}$$

の保存量が得られる。これらをデカルト座標で表わすと

$$I=(p_x(xp_y-yp_x)-\frac{a}{r}y)+\frac{r+y}{r}(b\sqrt{r+x}+c\sqrt{r-x}), \tag{4.16 - 2}$$

を得る。これが、超可積分系を特徴付ける保存量である。もちろん、可積分系を示す保存量は (4.8) と (4.9) で与えられている関数である。また、$b=c=0$ とすると (4.2) は２次元ケプラー運動を与えており、(4.16) からは２次元ケプラー運動のRunge-Lenzベクトルの成分を与えていることも分かる。

次に、(4.3) で与えられる力学系を考える。(4.2) で与えられる力学系と同様にして、放物線座標 (ξ,η) を導入する。このとき、Hamiltonian H_2 は次のようになる。

$$H_2=\frac{\xi p_\xi^2+\eta p_\eta^2}{2(\xi+\eta)}+\frac{a}{\xi+\eta}+\frac{1}{\xi+\eta}(\frac{b}{2\xi}+\frac{c}{2\eta}). \tag{4.17}$$

やはり変数分離系であるので、分離定数をαとすると次の式を得る。

$$\xi p_\xi^2-2H_2\xi+a+\frac{b}{\xi}=\alpha, \tag{4.18}$$

$$\eta p_\eta^2-2H_2\eta+a+\frac{c}{\eta}=-\alpha. \tag{4.19}$$

式(4.18)と式(4.19)より、角変数χとϕでパラメータ化ができる。結果は次のように与えられる。

$$\xi p_\xi = K_1 \cos(\chi), \quad \xi + \frac{a-\alpha}{-4H_2} = K_1 \frac{1}{\sqrt{-2H_2}} \sin(\chi). \tag{4.20}$$

$$\eta p_\eta = K_2 \cos(\phi), \quad \eta + \frac{a+\alpha}{-4H_2} = K_2 \frac{1}{\sqrt{-2H_2}} \sin(\phi). \tag{4.21}$$

ただし、正の定数K_1, K_2は次の形をとる。

$$K_1^2 = \frac{(a-\alpha)^2}{-8H_2} - b, \quad K_2^2 = \frac{(a+\alpha)^2}{-8H_2} - c \tag{4.22}$$

従って、ξとηについての微分方程式は、次のようなχとϕについての微分方程式に変換される。

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\sqrt{-2H_1}}{\xi+\eta}, \tag{4.23}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\sqrt{-2H_1}}{\xi+\eta}. \tag{4.24}$$

つまり、2次元トーラス上の微分方程式となる。(4.23)と(4.24)から閉軌道性もいえる。超可積分性を示す保存量については、$\chi - \phi =$定数より$\cos(\chi)\cos(\phi) + \sin(\chi)\sin(\phi)$から

$$I = \xi\eta p_\xi p_\eta - 2H_2\xi\eta + \frac{a+\alpha}{2}\xi + \frac{a-\alpha}{2}\eta, \tag{4.25}$$

が得られる。

最後に、極座標で変数分離できる超可積分系として、(4.4)で与えられる力学系を考える。極座標(r, θ)を用いると, Hamiltonian H_3は次のようになる。

$$H_3 = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + \frac{b}{r^2\sin^2(\theta)} + \frac{a}{r} + \frac{c\cos(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}. \tag{4.26}$$

やはり変数分離系であるので、分離定数をαとすると次の式を得る。

$$\frac{p_\theta^2}{2} + \frac{b}{\sin^2(\theta)} + \frac{c\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \alpha, \tag{4.27}$$

$$\frac{p_r^2}{2} + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{a}{r} = H_3. \tag{4.28}$$

式(4.27)と式(4.28)より、上の2つの例と同様に角変数χとϕを用いてパラメータ化ができる。結果は次のようになる。

$$p_\theta \sin(\theta) = K_1 \cos(\chi), \quad \cos(\theta) + \frac{c}{2\alpha} = K_1 \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sin(\chi). \tag{4.29}$$

$$p_r = K_2 \cos(\phi), \quad \frac{1}{r} + \frac{a}{2\alpha} = K_2 \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sin(\phi). \tag{4.30}$$

ここでの、正の定数K_1, K_2は次の形をとる。

$$K_1^2 = 2\alpha - 2b + \frac{c^2}{2\alpha}, \quad K_2^2 = 2H_3 + \frac{a^2}{2\alpha}. \tag{4.31}$$

従って、rとθについての微分方程式は、次のようなχとϕについての微分方程式に変換される。

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\sqrt{2\alpha}}{r^2}, \tag{4.32}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\sqrt{2\alpha}}{r^2}. \tag{4.33}$$

つまり、この時も２次元トーラス上の流れとして表されたことになる。やはり、(4.32) と (4.33) から閉軌道性がいえる。超可積分性を示す保存量については、$\chi - \phi =$定数より $\cos(\chi)\cos(\phi) + \sin(\chi)\sin(\phi)$ から

$$I = p_r p_\theta \cos(\theta) + 2\alpha\frac{\cos(\theta)}{r} + \frac{c}{r} + a\cos(\theta), \tag{4.34}$$

が得られる。

以上３個のこれまでに知られている、自由度２の自然ハミルトン系の超可積分系ではすべて角変数(χ, ϕ)を導入することにより、簡単に閉軌道性と超可積分系を特徴付ける保存量が構成できることが分かった。

5　自由度２の中心力系の拡張と超可積分系

本節では、極座標で分離できる２次元の力学系を超可積分系の性質を保ったまま拡張することを考える。前節の Hamiltonian (4.4) を再び考え本節ではH_3をHで表す。極座標で表した (4.26) を再記する。

$$H = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + \frac{b}{r^2\sin^2(\theta)} + \frac{a}{r} + \frac{c\cos(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}. \tag{5.1}$$

前節と同様に、分離定数をαとすると次の式を得る。

$$\frac{p_\theta^2}{2} + \frac{b}{\sin^2(\theta)} + \frac{c\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \alpha. \tag{5.2}$$

$$2Hr^2 = p_r^2 r^2 + 2\alpha + 2ar. \tag{5.3}$$

r方向の式 (5.3) を第２節で示した多重ケプラー運動の式に対応するように拡張すると、定数c_0, c_1, c_2, c_3と有理数νを用いて次のようにに書けるとする。

$$2\tilde{H}c_0 r^{1/\nu} + 2Hc_1 r^{2/\nu} = p_r^2 r^2 + 2\alpha + c_2 r^{1/\nu} + c_3 r^{2/\nu}. \tag{5.4}$$

このとき、もとのHamiltonianはつぎのように拡張される。

$$\tilde{H}=\frac{r^{2-1/\nu}}{c_0+c_1r^{1/\nu}}\left(\frac{p_r^2}{2}+\frac{p_\theta{}^2}{2r^2}\right)+\frac{c_2+c_3r^{1/\nu}}{c_0+c_1r^{1/\nu}}+\frac{r^{-1/\nu}}{c_0+c_1r^{1/\nu}}\left(\frac{b}{\sin(\theta)^2}+\frac{c\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}\right). \quad (5.5)$$

上式(5.5)で与えられる力学系はやはり２次元の多重ケプラー運動の拡張となっており、半径rが有界だけでなく、角度変数θの動く範囲も有界となることにより、配位空間の軌道は原点を含まない閉曲線となる。

半径方向をこのように多重ケプラー運動の形に拡張することは、他の２次元の極座標で変数分離可能な超可積分系へ適用する事は可能である。一般にn次元の中心力系では半径方向と$n-1$個の角度方向に運動は分離されるので、ここで述べた多重ケプラー系への拡張は可能と思われる。

6 結言

以上の考察から、これまでに見いだされた超可積分系の多くは、角変数によるパラメータ化により対応するトーラス上の微分方程式で表され、付加的な保存量も容易に見いだされることがわかった。同時に超可積分系の閉軌道性も示された。また、極座標で分離される２次元の超可積分系はその半径方向を、多重ケプラー化できて一般化されることが分かった。今後は、保存量の導出方法がCalogero系等の超可積分系に適用できるかを検討する予定である。

参考文献

[1] E.A. Lacomba and J. Libre, Integrals, invariant manifold, and degeneracy for central force problems in $\mathbf{R}^n$, J. Math. Phys. **33**, 2138-2147 (1992).

[2] T. Iwai and Y. Uwano, The four-dimensional conformal Kepler problem reduces to the three-dimensional Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac's monopole field. Classical theory, J. Math. Phys. **27**, 1523-1529 (1986).

[3] T. Iwai and N. Katayama, On the extened Taub-NUT metrics, J. Geom. Phys. **12**, 55-75 (1993).

[4] T. Iwai and N. Katayama, Two kinds of generalized Taub-NUT metrics and the symmetry of associated dynamical systems, J. Phys. **A** Math. Gen. **27**, 3179-3190 (1994).

[5] T. Iwai and N. Katayama, Two classes of dynamical systems all of whose bounded trajectories are closed, J. Math. Phys. **35**, 2914-2933 (1994).

[6] T. Iwai and N. Katayama, Multifold Kepler systems - Dynamical systems all of whose bounded trajectories are closed, J. Math. Phys. **36**, 1790-1811(1995).

[7] Manuel F, Ranada, Superintegrable $n = 2$ systems, quadratic constants of motion, and potentials of Drach, J. Math. Phys. **38**, 4165-4178 (1997).